MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII, TINERETULUI ŞI SPORTULUI
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN CARAŞ-SEVERIN
Strada Ateneului 320112, Nr. 1, Reşița, Caraş-Severin, ROMÂNIA
Tel: 0255-214238; Fax: 0255-216042
E-mail: isjcaras@cs.ro; Web: http://www.cs.isj.edu.ro

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ 2010 – FAZA LOCALĂ
13.02 2010

CLASA A IX-A
PROFIL M1

1. Pentru fiecare număr natural m se notează $A_m = \{x \in \mathbb{Z} / |2x-1| + |3x-1| = m\}$.

a) Determinați A_8;

b) Arătați că, pentru orice $m \in \mathbb{N}$, mulțimea A_m are cel mult un element ;

c) Demonstrați că, pentru orice $n \in \mathbb{Z}$, există $m \in \mathbb{N}$ astfel încât $n \in A_m$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = \left[\frac{2x+3}{4}\right]$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a .

a) Arătați că există $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $a \neq b$, pentru care $f(a) = f(b)$.

b) Studiați dacă următoarea afirmație este adevărată:
pentru orice $p \in \mathbb{Z}$, există $m \in \mathbb{Z}$ astfel încât $f(m) = p$.

c) Determinațî numerele întregi k pentru care $1 + k = 2 \cdot f(k^2)$.

3. Să se arate că dacă $a, b \in (0, \infty)$ şi $a \cdot b = 1$, atunci : $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{a+b}$.

4. a) Să se arate că pentru orice punct *M* din planul unui paralelogram *ABCD* are loc egalitatea $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$. Reciproca este adevărată ?

* * *

b) Se consideră un pentagon *ABCDE* în care se notează cu *M,N,P,Q* punctele de intersecție ale segmentelor ce unesc mijloacele laturilor opuse în patrulaterele *BCDE, CDEA, EABD,* respectiv *ABCE.* Să se demonstreze că *MNPQ* este paralelogram dacă şi numai dacă *ABCD* este paralelogram.

Gazeta Matematică

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru: 3 ore
Fiecare problemă se punctează de la 0 la 7 puncte.